

## קוּמְבִּינְטוֹרִיקָה: מתמטיקה של גנבים הוגנים ושכחנים מתוחכמים

Noga Alon<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת פרינסטון, פרינסטון, ניו גרז'י, ארה"ב

<sup>2</sup>המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת תל אביב, תל אביב, ישראל

### סוקרים צעירים

MAOR

גיל: 13



מתמטיקה היא התחום המדעי האובייקטיבי ביותר שֶׁקִיִּם. מה שנכון היום במתמטיקה, לְעֵד יישאר בה נכון, ולוויכוחים מתמטיים תמיד תהייה הכרעות מובהקות לצד זה או אחר. אלה תכונות שאני אוהב מאוד במתמטיקה, מאז שהייתי ילד. במאמר זה, אנסה לְשַׁקֵּף לכם את יופייה של המתמטיקה, ואראה לכם שהיא מופיעה במצבים רבים בחיינו – גם במקומות שאולי לא היינו מצפים לכך. לאחר מכן, אתן לכם טעימה משני מחקרים שערכתי בתחום מתמטי שנקרא קוּמְבִּינְטוֹרִיקָה, ואסביר כיצד הם קשורים לבעיות שאנו נתקלים בהן ביומיום. אחת הבעיות האלה היא לדוגמה איך לבצע ניתוח מתמטי מדויק של זרמי נתונים גדולים שאיננו יכולים לשמור בזיכרון המחשב, באופן שיאפשר לנו להעריך תכונות סטטיסטיות שלהם. לבסוף, אנסה לסַפֵּק לכם מבט מעשי על חַיִּי כמתמטיקאי – האתגרים והקשיים שבהם, לצד ההנאות והסיפוק הגדולים שאני מפיק מהם.

פרופסור נוגה אלון זכה בפרס גֵּדֵל במדעי המחשב לשנת 2005, במשותף עם פרופסור יוסי מטיאס ופרופסור מריו סגדי, עבור עבודה שהניחה את היסודות לניתוח של זרמי נתונים באמצעות זיכרון מוגבל. בשנת 2022 זכה פרופסור אלון בפרס שאו במתמטיקה, במשותף עם פרופסור אהוד הָרוֹשׁוֹבְסְקִי, עבור תרומותיהם יוצאות הדופן למתמטיקה

## דיסקרטיות ולתורת המודלים עם אינטראקציה במיוחד לגיאומטריה אלגברית, טופולוגיה ומדעי המחשב.

### הקדמה – על יופייה של המתמטיקה

מתמטיקה היא תחום יָדע שיכול לעורר באנשים תחושות חזקות של משיכה או רתיעה. יש אנשים שאוהבים מאוד מתמטיקה כבר מגיל צעיר. אני לדוגמה ידעתי כבר בגיל 8 או 9 שארצה להיות מתמטיקאי כשאהיה גדול. אני סבור שכל האנשים צריכים לאהוב מתמטיקה או להיות מתמטיקאים (למעשה, אני אפילו חושב שמצבה של האנושות לא יהיה טוב כל כך אם מרבית האנשים יעסקו בתחום זה). בכל זאת, אני מוצא שבמתמטיקה יש הרבה יופי, שכל אחד ואחת יכולים ללמוד להבחין בו ולהעריכו – מקרוב או מרחוק.

עבורי מתמטיקה היא בראש ובראשונה דרך חשיבה הגיונית ואובייקטיבית שבאמצעותה אני מנסה להבין תהליכים לוגיים, או תהליכים שמתרחשים בעולם. אחד הדברים שאני אוהב במיוחד במתמטיקה הוא כאמור האובייקטיביות שלה. בוויכוחים מתמטיים, צד אחד יכול לשכנע את הצד האחר שהטיעון שלו נכון, והצד האחר באמת ישתכנע, כיוון שהמתמטיקה עצמה תשכנע אותו. דבר זה אינו מתרחש במקרים אחרים של חילוקי דעות (חֲשָׁבו למשל על ויכוחים פוליטיים – כמעט לא קורה שצד אחד משכנע את הצד האחר בצדקתו כך שהצד האחר מחליט לשנות את דעתו). במתמטיקה יש גם מִמד של יציבות – מה שנכון עכשיו נשאר נכון תמיד, ומה שלא נכון עכשיו תמיד יישאר לא נכון. בתחומי מדע אחרים, בכללם פיזיקה לדוגמה, אין זה בהכרח נכון – תיאוריות המְתארות את המציאות עשויות להשתנות, ופעמים רבות אכן הן משתנות בחלוף הזמן.

היבט נוסף שאהוב עליו במתמטיקה הוא האתגר הטמון בה. בתור מתמטיקאי אני מנסה לפתור חידות. לְחַלֵּק מהחידות אני יודע מראש שיש פתרון ומבקש למצוא אותו, ולחידות אחרות אפילו אני בטוח אם קיים פתרון. לא פעם, לְשִׁמֵע חידה כזו אני עשוי להרגיש שאין לי סיכוי לפתור אותה. אבל אז אני חושב עליה רבות, ומנסה כל מיני דרכים וגישות לפתרון, ופתאום מגיעה לי איזושהי הברקה. לא תמיד אני יודע להסביר מה גרם לזה, ולמה זה קרה דווקא עכשיו (חצי שעה אחרי שהתחלתי לחשוב על החידה, או שבועות וחודשים לאחר מכן). פתאום אני יודע משהו חדש שלא ידעתי קודם, ותהליך זה של התגברות על האתגר הראשוני ופיצוחה של החידה המתמטית מְסַב לי סיפוק רב.

לפעמים אני אפילו חושב על מתמטיקה כעל אומנות, כי היא ניחנה ביופי בפני עצמה. ישנם חלקים במתמטיקה שהם יישומיים יותר, ומשמשים תחומי מדע אחרים כמו למשל פיזיקה, כימיה וביולוגיה, כדי להסביר באמצעותם את המציאות שלנו. לצידם ישנם במתמטיקה גם חלקים מופשטים שבהם מגדירים מבנים מתמטיים שונים שאין להם בהכרח קשר למציאות שאנו מכירים. לעיתים כן מתגלה קשר כזה בדעיבד, אבל בעיניי למתמטיקה יש עֵרֶךְ פנימי שאינו תלוי בשאלה אם היא מתארת משהו במציאות. כמו אומנות מופשטת – שאינה עוסקת בפריטים מוחשיים בעולם הפיזי והיא אסתטית (כלומר, יפה ונעימה לעין), גם מתמטיקה מופשטת היא אסתטית וְמְסַפֶּקֶת לנו חוויה של יופי.

#### אובייקטיבי (Objective)

משהו שלא מושפע מדעה אישית, ואי אפשר להתווכח עליו.

## מתמטיקה מופיעה בחיינו במקומות מפתיעים

מתמטיקה אינה מוגבלת רק לבעיות שאנו פותרים על נייר בשיעורי אלגברה וגיאומטריה. לעיתים קרובות היא מופיעה בליבן של תופעות שאנו פוגשים בחיי היומיום. בתור דוגמה, אתאר לכם את סיפורו של **סוציולוג** הונגרי בשם שנודר סאלאי (Sandor Szalai), שחי ופעל במאה שעברה. סאלאי ערך ניסויים על יחסי חברות בין ילדים. הוא שאל כל זוג ילדים אם הם חברים או לא, כאשר עבור כל זוג היחס היה סִמְטְרִי – כלומר, אם האחד אמר שהם חברים אז גם האחר/ת אמרו שהם חברים, ולהפך (במילים אחרות, לא היה מצב שבו אחד אמר שכן ובן/ בת הזוג אמרו שלא). סאלאי גילה כי באופן עקבי בכל פעם שהיו בקבוצה שמונה עשר ילדים לפחות, תמיד היו מתוך הקבוצה הזו ארבעה ילדים שכל זוג מתוכם (סך הכול יש שישה זוגות כאלה) היו כולם חברים, או שהיו כולם לא חברים. סאלאי שמח כי חשב שמדובר בתגלית סוציולוגית חדשה ומלהיבה. לאחר שיחה עם חבריו המתמטיקאים, התברר לו כי כָּלֵל לא מדובר בתגלית סוציולוגית אלא בעובדה מתמטית! מתברר כי המצב שסאלאי חקר הוא מקרה פרטי של תורה מתמטית בשם 'תורת רמזי' (Ramsey's theorem). תורת רמזי גורסת כי במצבים כלליים ביותר לא ניתן לקבל אי-סדר מוחלט. כלומר, שכל מערכת מספיק גדולה מכילה תת-מערכת שהיא מסודרת מאוד.

כדי להסביר את הרעיון הזה על הדוגמה שלנו, נוכל לייצג כל ילד בתור נקודה על דף, ולחבר כל זוג נקודות בקו כחול, שנבחר כמסמך שהילדים חברים, או בקו אדום, שנבחר כמסמך שהילדים לא חברים. בסך הכול נקבל שמונה עשרה נקודות שכל זוג מהן מחובר בקו כחול או בקו אדום. לפי תורת רמזי, לא משנה איך נצבע את הזוגות האלה, תמיד נקבל ארבע נקודות שכל הזוגות ביניהן צבועים באדום או ארבע נקודות שכל הזוגות ביניהן צבועים בכחול. אם כן, התוצאה הזו של קיום ארבעה ילדים מתוך שמונה עשר שעבורם כל הזוגות חברים או לא חברים היא תוצאה מתמטית, לא סוציולוגית.

תוכלו לערוך תרגיל קטן, ולבדוק מה קורה בסיטואציה דומה עם שישה ילדים. נסו לחבר כל זוג מבין שש נקודות על דף באמצעות קווים כחולים ואדומים. תגלו שלא משנה איך תמתחו את הקווים, בכל מקרה תקבלו משולש כחול או משולש אדום, או גם משולש אדום וגם משולש כחול (איור 1). לסקרנים שביניכם, נסו להוכיח כי אם לוקחים 5 ילדים, אין זה כך – לא חייבים לקבל משולש כחול או משולש אדום.

## קומבינטוריקה – שתי דוגמאות על גנבים ושכחנים

אחד התחומים העיקריים שאני עוסק בהם במתמטיקה נקרא **קומבינטוריקה**. מבחינה פורמלית קומבינטוריקה היא המתמטיקה של מבנים סופיים (בניגוד למתמטיקה רציפה שעוסקת במבנים לא סופיים) [1]. לְשֵׁם פשטות, חֲשְׁבו על המבנים האלה בתור אוסף של עצמים. בקומבינטוריקה, אנו עוסקים בקבוצות סופיות של עצמים, ומנסים להבין מה התכונות שלהן. בדוגמת הילדים שהובאה קודם, קבוצה היא אוסף של נקודות שחלקן מחוברות בכחול, וחלקן מחוברות באדום. קומבינטוריקה קלאסית עוסקת בשאלות כמו: כמה אפשרויות ישנן לְסַדֵּר עשרה ילדים בשורה זה לצד זה? וכן, כמה אפשרויות ישנן לְבַחֵר עשרה ילדים מתוך קבוצה של חמישים ילדים? ביכולתנו גם לשאול שאלות מורכבות יותר, כמו למשל: האם אנו יכולים לבחור מתוך קבוצה של שבעה ילדים שבע נְשָׁלוֹת כך שלכל זוג

### סוציולוג (Sociologist)

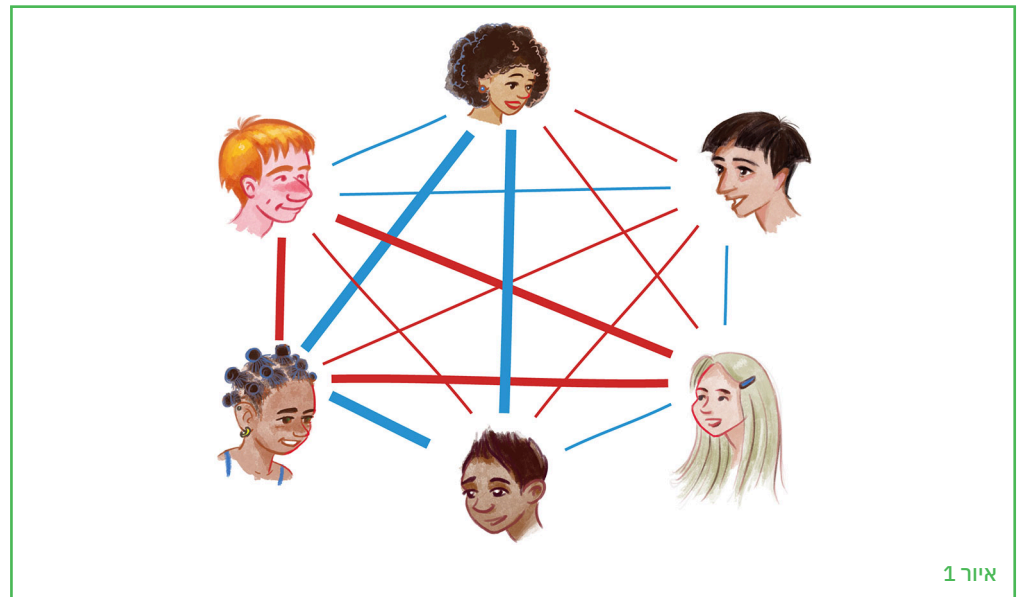
אדם החוקר את החברה -  
קבוצות ויחידים בתוכה, וגם  
היא כשלעצמה.

### קומבינטוריקה (Combinatorics)

תחום במתמטיקה העוסק  
בחקירת התכונות של קבוצות  
סופיות של עצמים.

## איור 1

מתמטיקה חברתית. אם נסתכל על שישיית ילדים שכל זוג ביניהם יכולים להיות או חברים (קו כחול) או לא חברים (קו אדום), נקבל בהכרח כי שלושה מתוכם כולם חברים (משולש כחול) או/גם כי שלושה מתוכם כולם לא חברים (משולש אדום). זוהי תוצאה מתמטית שמשפיעה על מבנים חברתיים.



איור 1

שְׁלֹשׁוֹת יהיה בדיוק ילד אחד המשותף לשלישייה האחת ולשלישייה האחרת, ולכל שני ילדים בקבוצה תהיה בדיוק שלישייה אחת שמכילה אותם? דוגמה נוספת לשאלה קומבינטורית על מבנה שאתם אולי מכירים, קשורה למשחק סודוקו. נוכל למשל לשאול את עצמנו כמה ריבועי סודוקו שונים ישנם עבור ריבוע סודוקו בגודל  $30 \times 30$ .

בקומבינטוריקה מודרנית, אנו עוסקים בבעיות קיצון, ושואלים את עצמנו מה הגודל הגדול ביותר או הקטן ביותר של מבנה קומבינטורי שמקיים תכונות מסוימות. לשאלות כאלה ישנם שימושים רבים במדעי המחשב, וגם בתחומים אחרים של מתמטיקה כמו למשל גיאומטריה או תורת המספרים. כעת, אציג לכם שתי דוגמאות לחידות קומבינטוריות שאותן חקרת.

## גנבים הוגנים

אחת הבעיות שבהן התעמקתי בקריירה שלי, עוסקת בחלוקה הוגנת של מחרוזות. הִשְׁבּוּ על מקרה שבו גנבים (בעלי כישורים מתמטיים) גונבים שרשרת עם שני סוגי אבני חן – יהלומים ואבני אודם (איור 2). הגנבים הם הוגנים, ומחליטים שכל אחד מהם יקבל מספר זהה של יהלומים ושל אבני אודם. בתהליך חלוקת הִשְׁלָל הם רוצים לחתוך את השרשרת לכמה שפחות חלקים. נשאלת השאלה – כמה חתכים (לכל הפחות) הם צריכים לבצע כדי לחלק ביניהם את השרשרת בצורה הוגנת?

קל לראות שאם האבנים בשרשרת היו מסודרות כשסוג אחד נמצא בצד אחד והסוג השני בצד האחר, היו מספיקים שני חתכים כדי לחלק את השלל באופן הוגן (איור 3A). כעת נוכיח כי גם אם האבנים בשרשרת לא מסודרות בצורה מיוחדת אלא בצורה אקראית, עדיין מספיקים שני חתכים כדי לחלק את השלל באופן הוגן. נניח שבשרשרת יש לנו שמונה יהלומים ושש אבני אודם. כדי שהחלוקה תהיה הוגנת, על כל גנב לקבל ארבעה יהלומים ושלוש אבני אודם.

## איור 2

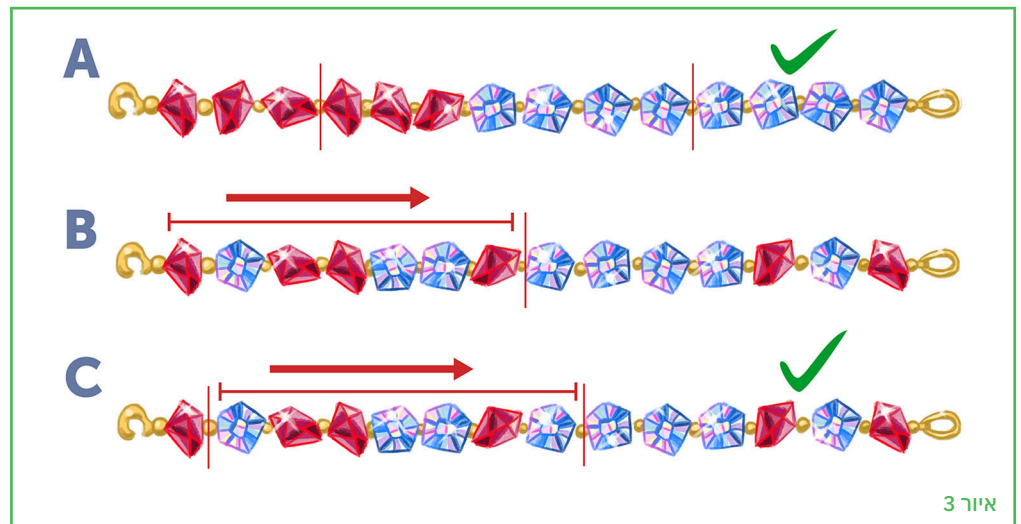
חלוקה הוגנת של מחרוזת המורכבת מיהלומים ומאבני אודם. נניח ששני גנבים גונבים שרשרת המורכבת מיהלומים ומאבני אודם, והם רוצים להתחלק בשלל שווה בשווה. כמה חתכים לכל הפחות הם יצטרכו לבצע במחרוזת כדי להתחלק בשלל באופן שווה? האם אתם רואים כי במקרה של איור זה מספיק שיבצעו חתך אחד כזה?



איור 2

## איור 3

חלוקה הוגנת של מחרוזת המורכבת משני סוגי אבנים יקרות. (A) אם ניקח שרשרת שבה שש אבני אודם שמסודרות בצד שמאל ושמונה יהלומים שמסודרים בצד ימין, קל לראות שיספיקו שני חתכים במחרוזת (קווים אנכיים באדום) כדי לקבל חלוקה הוגנת של השרשרת. ואכן, בין שני החתכים מקבל שלוש אבני אודם וארבעה יהלומים, וכך גם בחלקים משמאל ומימין לשני החתכים. (B) עבור שרשרת בעלת אותה כמות של אבני אודם ויהלומים כמו ב-A שמסודרת בצורה אקראית, ניתן לראות שחתך אחד באמצע יצור מצב של יותר מדי אבני אודם ופחות מדי יהלומים בצד שמאל, לעומת פחות מדי אבני אודם ויותר מדי יהלומים בצד ימין. (C) אם נזיז את החתך אבן אחת ימינה ונוסיף חתך אחרי האבן הראשונה משמאל, נוסף למעשה יהלום אחד ונוריד אבן אודם אחת מהקטע האמצעי בשרשרת. כעת נקבל מצב שבו בתוך הקטע שבין שני החתכים ומחוצה לו יש מספר זהה של שלוש אבני אודם וארבעה יהלומים. כלומר, גם עבור השרשרת האקראית מספיקים שני חתכים כדי לחלק את האבנים היקרות באופן שווה לשני אנשים.



איור 3

נתחיל ממצב שבו היהלומים ואבני האודם מסודרים בצורה אקראית לאורך השרשרת (איור 3B). בתור התחלה, נחתוך את השרשרת באמצע ונבחין בכך שיש לנו יותר מדי אבני אודם בצד שמאל (ארבע אבנים), ומעט מדי אבני אודם בצד ימין (שתי אבנים). כעת, ניקח את מקטע החיתוך שלנו ונזיז אותו מקום אחד ימינה באמצעות חתך נוסף (איור 3C). הזזת החתך כולו מקום אחד ימינה גרמה לכך שיתווסף יהלום אחד מצד ימין, ותוחסר אבן אודם אחת מצד שמאל (איור 3C). אם נספור כעת את כמות האבנים בין שני הקווים האדומים (השלל של הגנב הראשון) ומחוץ לשני הקווים האדומים (השלל של הגנבת השנייה), נראה כי בשני המקרים קיבלנו כמות זהה של ארבעה יהלומים ושלוש אבני אודם. הצלחנו לחלק את השרשרת בצורה הוגנת באמצעות שני חתכים!

עתה נכליל את המקרה הפרטי שבחנו לעיל, למקרה כללי שבו ישנה מחרוזת עם כמות זהה של אבנים מכל סוג, המסודרות לאורך השרשרת בצורה אקראית. נבחר תחילה מקטע חיתוך בין קצה השרשרת לאמצעה. בכל הזזה ימינה שאנו מבצעים עם מקטע החיתוך שלנו, אנו מוותרים על אבן אחת מצד שמאל, ומרוויחים אבן אחת מצד ימין משום שכמות האבנים צריכה להישאר זהה (במקרה שתואר מקודם, החתך מכיל תמיד שבע אבנים – מחצית

מתוך ארבע עשרה האבנים שישנן). כלומר, יש לנו סך הכול ארבע אפשרויות למה שיקרה אחרי התזזה:

1. נפסיד אבן אודם מצד שמאל ונקבל אבן אודם מצד ימין

2. נפסיד יהלום מצד שמאל ונקבל יהלום מצד ימין

– בשני המקרים האלה מספר אבני האודם בתוך המקטע שלנו יישאר כשהיה –

3. נפסיד אבן אודם מצד שמאל ונקבל יהלום מצד ימין – אז תהיה לנו אבן אודם אחת פחות מאשר לפני ההזזה

4. נפסיד יהלום מצד שמאל ונקבל אבן אודם מצד ימין – אז תהיה לנו אבן אודם אחת יותר.

תוכלו לראות שבכל מקרה מספר אבני האודם שיש ברשותנו יכול להשתנות רק ב-1 אחרי ההזזה. אם נתחיל למשל במצב שבו בחצי השמאלי של השרשרת יש לנו יותר מדי אבני אודם, ונזיז את המקטע כל הדרך עד לחצי הימני של השרשרת, בהכרח נקבל מצב שבו יש לנו פחות מדי אבני אודם (כי אז חזרנו למצב ההתחלתי, שבו מצד שמאל היו יותר מדי אבני אודם, ומצד ימין היו פחות מדי אבנים).

אם נתחיל במצב של יותר מדי אבני אודם בצד אחד, ונסיים במצב של פחות מדי אבני אודם בצד הזה, כאשר כל פעם שינינו את המצב בלא יותר מאבן אודם אחת – הרי בטוח שבשלב כלשהו בדרך נגיע למצב שבו יש לנו מספר זהה של אבני אודם בשני הצדדים (ובאופן אוטומטי גם מספר זהה של יהלומים בשני הצדדים). זו תוצאה של משפט מתמטי בשם *משפט ערך הביניים הדיסקרטי*, שלפיו אם משהו מתחיל מערך גדול מדי, מסיים בערך קטן מדי, ומשתנה במעט על ידי ההזזה קטנה בכל פעם – בדרך נקבל בהכרח את הערך שאנו רוצים.

במקרה הכללי של אותה בעיה, אנו יכולים לחשוב על מספר כלשהו של גנבים, שנסמן אותו ב- $k$ , ומספר כלשהו של סוגי אבנים, שנסמן אותו ב- $t$ . מה שאני הוכחתי הוא שבכל מקרה כזה שבו אנו רוצים לחלק שרשרת עם  $t$  סוגי אבנים שווה בשווה בין  $k$  גנבים, מספיק לבצע בשרשרת  $(k-1) \cdot t$  חתכים כדי לחלק את השלל בצורה הוגנת [2]. במקרה הפשוט שראינו קודם היו  $k=2$  גנבים ו- $t=2$  סוגי אבנים, ויכולנו לחלק את השלל באמצעות  $2 = (2-1) \cdot 2$  חתכים. באותו אופן, אם נחשוב על מקרה של ארבעה גנבים ושני סוגי אבנים, נוכל לחלק את השלל בצורה הוגנת על ידי  $6 = (4-1) \cdot 2$  חתכים. דוגמה מפורטת יותר על המקרה של ארבעה גנבים ושני סוגי אבנים, והסבר אינטואיטיבי על ההוכחה למקרה הכללי, ניתן לראות בסרטון זה. חשוב להבין שההוכחה למקרה הכללי היא מורכבת, ואינה נובעת באופן פשוט וישיר מההוכחה למקרים של שני גנבים או של ארבעה גנבים. לעיתים קרובות זה כך במתמטיקה – לא מספיק רק לחשוב בהיגיון ולטעון טענות אינטליגנטיות, אלא צריך גם להשתמש בשיטות ובכלים שדורשים ידע והבנה רבים. במקרה שלנו, ההוכחה של חלוקת שרשרת בצורה הוגנת דורשת שימוש בשיטות מתמטיות מתקדמות, לרבות שימוש בכלים מתחום במתמטיקה שנקרא *טופולוגיה*.

### טופולוגיה (Topology)

ענף במתמטיקה העוסק בתכונות של המרחב הנשמרות גם אחרי שינויים רציפים במרחב.

הבעיה הזו שתיארתי לכם במונחים של חלוקה הוגנת של שרשרת אבנים יקרות, תִּקְפָּה גם למצבים אחרים מחיי היומיום. תוכלו לחשוב למשל על המצב של פריסת עוגה ארוכה שעל חלקים שונים בה יש שוקולד, סוכריות והפתעות נוספות, ואנו מעוניינים לחלקה בין אנשים כך שכל אחד יקבל את אותה הכמות מכל אחת מהתוספות שעל העוגה. אם נחפש דוגמה עתיקה יותר מההיסטוריה, נוכל לחשוב על מקרה שבו מבקשים לחלק חלקת אדמה בין אנשים שונים, כאשר החלקה מורכבת מסוגים שונים של קרקע (קרקע חקלאית, קרקע טבעית, קרקע לבנייה). במקרה כזה, כיוון שחלוקת הקרקע דורשת משאבים, אך גם היות שרוצים שכל אדם יקבל חלקת אדמה גדולה ככל האפשר (ושצורתה לא מסובכת מדי), הגיוני ששואפים לתת לכל אדם חלק שקול מבחינת סוגי הקרקע, בלי לחלק את הקרקע ליותר מדי חלקים.

בעיות מודרניות בכיוון זה עוסקות בשאלה של חלוקת משאבים. במקרה הזה, יש לנו אוסף כלשהו של משאבים לחלוקה בין אנשים, אבל לכל אדם יש העדפות שונות ודעות שונות לגבי הערך של כל משאב. השאיפה שלנו היא לחלק את המשאבים השונים בין האנשים כך שהחלק שכל אדם מקבל יהיה זהה מבחינת הערך האישי שהוא מעניק למשאבים האלה (לדוגמה, אדם מסוים יקבל חלק שהוא מעדיף, אך שאולי עשוי פחות "למצוא חן" בעיני אדם אחר). באופן הזה, אף אדם לא יקנא בזולתו, וכולם יהיו מרוצים ממה שהם מקבלים. בשאלות כאלה בין השאר עוסקת תורה במתמטיקה שנקראת

תורת המשחקים האלגוריתמית.

### תורת המשחקים האלגוריתמית (Algorithmic game theory)

תורה מדעית שמשלבת בין תורת המשחקים, שחוקרת אינטראקציות בין גורמים בעלי אינטרסים שונים, לבין תורת החישוביות, שעוסקת במודלים של חישוב ובאלגוריתמים לביצוע פעולות חישוביות.

### שכחים מתוחכמים

בעיה נוספת שעסקתי בה בעבודתי היא סוגיה מעניינת במדעי המחשב שקשורה לאלגוריתמים לטיפול במידע זורם. במקרה כזה, מגיע אלינו אוסף גדול מאוד של נתונים – כל כך גדול שאיננו יכולים לשמור אותו בזיכרון המחשב (חֲשָׁבו למשל על תעבורת מידע באינטרנט), אלא רק לקרוא אותו בזמן שהוא עובר דרך המחשב. אחת השאלות שעסקתי בהן היא: אילו תכונות סטטיסטיות של המידע הזה אנו יכולים לדעת למרות שאין באפשרותנו לזכור אותו במחשב [3]. ישנם דברים שאנו מסוגלים לדעת על המידע הזה בלי לשמור אותו, ויש דברים אחרים שלא, ואין זה תמיד ברור ממש ראשון. אמחיש לכם זאת באמצעות דוגמה: אני עומד להגיד לכם עכשיו את כל המספרים השונים בין 1 ל-100 בסדר אקראי, חוץ ממספר אחד שאשמיט בכוונה. לכם אסור לכתוב את המספרים, ואתם גם לא תצליחו לזכור את כולם. השאלה שלי היא האם ישנה דרך שבה תוכלו בסוף לומר לי איזה מספר השמטתי, בלי לזכור את המספרים עצמם? חֲשָׁבו על כך קצת לפני שתמשיכו לפתרון.

התשובה היא שכן. אתם יכולים לגלות איזה מספר הושמט בלי לזכור את כל המספרים. הנה הפתרון: כל מספר שאגיד לכם, תִּתְּבְּרוּ למספר הקודם שאמרתי ותקבלו סכום. אם אגיד לכם 7 אתם תִּתְּבְּרוּ 7, אחר כך אגיד 8 ואז תחברו  $7+8$  ותזכרו 15. אחרי כן אגיד לכם 22, תחברו ל-15 ותזכרו 37, וכן הלאה. בסוף התהליך תקבלו את הסכום של כל המספרים שאמרתי לכם. את הסכום הזה תוכלו לחסר מהסכום של כל המספרים בין 1 ל-100, שאותו אגב אתם יכולים לחשב בדרך פשוטה יחסית כסכום של 50 זוגות, כשערכו של כל זוג הוא 101 ( $100+1, 99+2, 98+3, \dots, 50+51$ ). כלומר, סכום כל המספרים בין 1 ל-100 הוא  $101 \cdot 50 = 5,050$ . ההפרש שתקבלו מחיסור סכום המספרים שאמרתי לכם

מ-5,050 הוא בדיוק המספר שהשמטתי מסדרת המספרים! במקרה הזה, הצלחתם לענות על שאלה חשובה שקשורה במידע שקיבלתם, בלי שהייתם צריכים לזכור אותו.

השאלות שאני עוסק בהן מתייחסות לאוספים של מספרים גדולים מאוד, שבקלות יכולים להגיע לערכים של טריליונים (טריליון אחד הוא מיליון מיליון, או הספרה 1 שאחריה מופיעים 12 אפסים). אין באפשרותנו לשמור כמויות כאלה של מספרים גדולים בזיכרון המחשב, ולכן עלינו למצוא מה אנו כן יכולים לדעת עליהם בלי לשמור אותם. מתברר למשל, שאם אנו רוצים לדעת אם מבין כל המספרים שעברו יש מספר שהגיע פעמיים – לא נוכל לעשות זאת בלי לזכור את כל המספרים. אבל, אם אנו רוצים לדעת בערך כמה מספרים שונים זה מזה הגיעו, יש דרך שבה נוכל לעשות זאת בלי לזכור את המספרים עצמם [3] – ראו הדגמה רעיונית לכך באיור 4. לא אפרט את הדרך להראות זאת כאן, מאחר שהיא מעט מסובכת, אבל אציין שבמקרה כזה יש באפשרותנו לבצע הערכה הסתברותית שבה, בהסתברות גבוהה (כלומר ברוב המוחלט של המקרים), נקבל תוצאה קרובה מאוד לתוצאה האמיתית, ובהסתברות קטנה (רק במעט מאוד מקרים) נקבל תוצאה שאינה מאוד קרובה לתוצאה האמיתית. ייתכן למשל שבהסתברות של 99% (כלומר, ב-99 מקרים מתוך 100) נקבל תוצאה שטועה בפחות מ-1% ביחס לתוצאה האמיתית, ובהסתברות של 1% (כלומר במקרה 1 מתוך 100), נקבל תוצאה שאינה קרובה לתוצאה האמיתית. כפי שאתם מבינים, המתמטיקה שאני עוסק בה מאפשרת לנו להגיע לתוצאות מפתיעות ובלתי צפויות, וזה חלק נוסף ביופי שלה – לְאִפְשֵׁר לָנו לְהִתְרַחֵב אֶל מַעֲבָר לַאיִנטוּאיצִיָה הַרְאִשׁוֹנִית שֶׁלָנוּ.

#### איור 4

אלגוריתמים לטיפול במידע זורם. ישנם מצבים שבהם אנו נדרשים להתמודד עם כמויות אדירות של מידע שמגיע אלינו, ואין באפשרותנו לשמור את כולו במחשב, כמו למשל מידע שזורם ללא הפסקה באינטרנט (מתואר באופן פשוט) על ידי זרימת הכדורים הרבים שבאיור. כדי להצליח להסיק משהו חשוב לגבי המידע הזה, בלי לשמור אותו, עלינו להשתמש ב'תכסיסים' מתמטיים שונים (מימין למטה) המאפשרים לנו, בהסתברות גבוהה, לקבל תוצאה קרובה לתוצאה האמיתית – אותה איננו יכולים לחשב בדיוק בלי לשמור את המידע כולו.



איור 4

#### תורת האינפורמציה (Information theory)

ענף במתמטיקה שבמסגרתו נחקרת העברת מידע בין מקור ליעד המחוברים על ידי ערוץ תקשורת.

#### תורת הגרפים (Graph theory)

תחום במתמטיקה שעוסק בגרפים - מבנים קומבינטוריים המופיעים בהקשרים רבים.

העבודות האלה הניחו את היסודות לניתוח מתמטי מסודר של זרמי נתונים בכמות גדולה מאוד ('ביג דאטה') באמצעות זיכרון מחשב מוגבל. כך המשתמשים יכולים לחלץ, ברמת דיוק גבוהה, מידע רצוי, כמו למשל להעריך כמה פעמים מופיע מספר מסוים בנתונים הרבים, ללא צורך לשמור את כל המספרים. לעבודות אלה ישנן גם השלכות חשובות בתורת האינפורמציה, בתורת הגרפים, ובמגוון היבטים תיאורטיים ויישומיים.



## המלצות למוחות צעירים מבט על חייו של מתמטיקאי

לאנשים שאינם מתמטיקאים, קשה לדמיין איך נראים חייו של מתמטיקאי. אני זוכר שאפילו בתור סטודנט לתואר ראשון במתמטיקה, לא היה לי ברור מהי המשמעות של עריכת מחקר בתחום. כדי להעניק לכם חלון הצצה לחייהם של מתמטיקאים, אתחיל בדברים השגרתיים יותר. בתור מתמטיקאי או מתמטיקאית באוניברסיטה, יש למלא כל מיני חובות ודרישות: ללמד קורסים; להנחות סטודנטים; לכתוב מאמרים ולפרסמם. לפעמים מתקבלת בקשה לכתוב מכתב המלצה לעמית או עמיתה לתחום, או לסקור מאמר של מתמטיקאית או מתמטיקאי אחרים העוסק בתחומים שיש לך הבנה בהם. כשאני מגיע למשרד בבוקר, אני פותח את המחשב וקורא הודעות דואר אלקטרוני. לעיתים קרובות אמצא שם שאלות מתמטיות שאנשים מחפשים תשובות עליהן, וסבורים שְאֹכֵל לִסְפֵק אותן או להפנותם למקורות רלוונטיים. לפעמים השאלות שאני מקבל קשורות למשהו שאני כבר מכיר, או לדבר דומה מאוד למה שאני מכיר, ואז אני יודע לענות עליהן. פעמים אחרות, מדובר במשהו שאיני מכיר אבל מעניין אותי לחשוב עליו, ואז אני חושב קצת על השאלה ורואה אם עולים לי רעיונות לפתרון.

בזמנים אחרים לאורך היום, אני חושב על בעיות מתמטיות שקשורות למחקר האישי שלי. לפעמים אני קורא מאמרים שאנשים אחרים פרסמו על אודות השאלות המתמטיות שמעניינות אותי, ולפעמים יושב וחושב בעצמי איך אפשר לפתור בעיה מסוימת שעוד לא פתרו. בניגוד למה שאנשים שאינם מתמטיקאים עשויים לחשוב, חלק ניכר מהעבודה על פתרון בעיות מתמטיות אינו כולל עיסוק ישיר במשוואות ובחישובים. הדימוי הנפוץ של מתמטיקאי כאדם שמבצע חשבונות ארוכים למדי שבסופם הוא מגיע לתוצאה הנכספת, אינו מדויק. מרבית הזמן אני עסוק במציאת רעיונות לדרכים אפשריות לפתור את הבעיה, ושואל שאלות במוחי כמו 'איזה סוג של חשבון צריך לבצע במקרה הזה?' או 'מה יכול לקדם אותי בהבנה של הבעיה?'. לעיתים, בסופו של התהליך הזה תהיה משוואה שאצטרך לפתור, או חשבון שאצטרך לעשות, אבל זה יהיה רק חלק קטן בתהליך, ולרוב הוא גם יהיה התוצר של התקדמות רעיונית שהתרחשה לפניו.

חשוב לציין כי במחקר מתמטי, ובמחקר מדעי בכלל, רוב הזמן חווים תסכול במובן מסוים, עקב אי-הצלחה לפתור את הבעיות שהחוקר או החוקרת מנסים לפתור. יתרה מזו, אם כן מצליחים באופן תדיר לפתור את הבעיות שעוסקים בהן, זה מעיד על כך שהחשיבה היא על דברים פשוטים מדי ולא מספיק מעניינים. חוסר הצלחה השוטף הזה, שהוא חלק מהותי ממחקר טוב, מְלַמֵּה הרבה פעמים במחשבות טורדניות בסגנון 'זו בטח הייתה הפעם האחרונה שהצלחתי לפתור משהו... מכאן והלאה כבר לא אצליח...'. הניסיון מוכיח שאין זה כך, וחלק מהביטחון שצוברים לאורך הדרך קשור ביכולת לא להתפתות להאמין למחשבות המטילות ספק עצמי. אדגיש כי חלק מהנכונות שלי כמתמטיקאי להתמודד עם המאמץ שמחקר מתמטי דורש, קשור בתקווה שלהשקעה שלי יהיו פירות – שאצליח להבין משהו שלא הבנתי קודם, ולפתור בעיה שלא פתרו לפניי. למדתי ליהנות מהאתגר שבתהליך הזה, מתוך הבנה שהרגעים שאיני נהנה בהם חשובים כי הם הופכים את ההנאה שמגיעה אחריהם להיות משמעותית וּמְסֻפָּקֶת יותר. כמו כן, ברגעים שבהם אני מרגיש 'תקוע' בעבודתי, אני דואג לעשות משהו שְמִשְׁנֵה את המצב הפנימי שלי כדי להצליח להגיע לרעיון שונה וחדש. לפעמים אבחר לחשוב על בעיה מתמטית אחרת שמעסיקה אותי, ולפעמים אחליט לעשות משהו אחר לגמרי – לקרוא ספר, לראות סרט, או לעסוק בספורט. רק לעיתים

הרעיון החדש יופיע בתגובה למשהו חדש ששמעתי או קראתי. במרבית הפעמים, כשמגיע לי רעיון כזה איני יודע מה גרם לו להופיע דווקא עכשיו, ואיך זה קשור למה שעשיתי קודם. למרות שאיני יודע להתחקות אחר מקור הרעיונות, ניסיוני לימד אותי כי שינוי 'מצב הצבירה' הפנימי שלי תומך לא אחת בהופעתם של רעיונות חדשים.

### על מתמטיקאים צעירים

ייתכן שיעניין אתכם לדעת, כי לחוקרים צעירים יש יתרון מסוים על פני חוקרים מנוסים, במובן זה שהם פחות חוששים לעסוק בבעיות קשות שאנשים רבים לפניהם לא הצליחו לפתור. בתור חוקר מנוסה, אני מכיר מגוון בעיות מתמטיות לא פתורות, ויודע להעריך את רמת הקושי שלהן. מצד אחד, סטודנטית או סטודנט צעירים בתחילת דרכם עשויים שלא להכיר את ההיסטוריה של בעיה מתמטית מסוימת, ולא לדעת להעריך עד כמה היא קשה. לעיתים, חוסר הידע הזה עשוי לְשַׁרְת אותם, ובסופו של דבר הם יצליחו לפתור בעיה חשובה שלא פתרו לפניהם. מהצד האחר, חשוב להדגיש – במיוחד למי מכם שהמתמטיקה הבית-ספרית קלה לו או לה במיוחד – אינכם יכולים לעשות הכול ולדעת הכול בעצמכם. גם אם אתם מוכשרים ואינטליגנטיים מאוד, עדיין תיִדְרְשו ללמוד הרבה מהיִדְע שנצבר על ידי דורות שלמים של מתמטיקאים חכמים שהשקיעו הרבה מזמנם כדי לפתח שיטות שונות במתמטיקה. רכישת הידע הזו מתבצעת לרוב על ידי עיון בספרות המדעית; האזנה להרצאות, וקיום דיונים עם מתמטיקאיות ומתמטיקאים אחרים שמתעניינים באותם תחומים.

### מחשבות על פרסים והישגים

במהלך הקריירה שלי קיבלתי פרסים רבים למדי. בכל פעם, שמחתי לְזַכּוֹת בהכרה על עבודתי, ותמיד עודד אותי להיווכח כי מה שעשיתי מעניין גם אנשים אחרים. הפרסים שקיבלתי אף היטיבו עם הקריירה שלי, ואפשרו לי גמישות בבחירות האקדמיות שלי לאורך הדרך. לצד זה שאני נהנה לקבל פרסים, חשוב לי להדגיש שאיני מכוון את מחקרי למטרה זו. סיבה מרכזית לכך היא שפרסים אינם דבר מובטח, והם תלויים במגוון גורמים שאין לי שליטה עליהם. במקרים רבים, אין לי אפשרות לדעת איזו חשיבות יש לדברים שאני עושה, וזו מתגלה רק בדיעבד. דוגמה טובה לכך היא למשל המחקר שסיפרתי לכם עליו קודם בנושא התכונות של מידע זורם, שבדיעבד התברר כחשוב, ופָתַח תחום מתמטי חדש שנקרא 'אלגוריתמי הזָרָמָה' (streaming algorithms). במחקר שלי, אני תמיד משתדל שהקריטריון העיקרי יהיה לעשות מה שהכי מעניין אותי. מאחר שפעמים רבות ההשפעה של מה שאני חוקר מתגלה בדיעבד והיא בלתי צפויה, חשוב בעיניי לעשות עכשיו את הדברים שמעניינים אותי בהווה. זה מחבר אותי להמלצה כללית יותר שאני מבקש להעניק לכם, והיא: עֲסֹקוּ בְּמָה שאתם אוהבים, וְאֶהְבּוּ את מה שאתם עושים. אלה שני צדדים של אותו המטבע, ושניהם חשובים. בְּמִקּוּם לעשות עכשיו משהו שלא כל כך מעניין אתכם מתוך מחשבה שבהמשך הוא יוביל אתכם להצלחה, בְּחֵרוּ לעשות כבר עכשיו את מה שאתם אוהבים לעשות. לפעמים זה יוביל אתכם להצלחה ולפעמים אולי לא, אך בכל מקרה באופן זה תבלו את חייכם בעשייה שתהיה משמעותית עבורכם.

### תודות

אני רוצה להודות לנועה שגב על עריכת הריאיון שהיווה בסיס למאמר זה, ועל כתיבה משותפת של המאמר. תודה לאלכס ברנשטיין על האיורים עבור המאמר.

## מקורות

1. Van Lint, J. H., and Wilson, R. M. (2001). *A course in combinatorics*. Cambridge university press.
2. Alon, N. (1987). Splitting necklaces. *Adv. Math.* 63(3), 247-253.
3. Alon, N., Matias, Y., and Szegedy, M. (1999). The space complexity of approximating the frequency moments. *J. Comput. Syst. Sci.* 58(1), 137-147.

פורסם אונליין: 28 בדצמבר 2023

נערך על ידי: Idan Segev

מנחים מדעיים: Deborah Karaim

**ציטוט:** Alon N (2023) קומבינטוריקה: מתמטיקה של גנבים הוגנים ושכחנים מתוחכמים. Front. Young Minds. doi: 10.3389/frym.2023.1158338-he

**תורגם והתאם מ:** Alon N (2023) Combinatorics: The Mathematics of Fair Thieves and Sophisticated Forgetters. Front. Young Minds 11:1158338. doi: 10.3389/frym.2023.1158338

**הצהרת ניגוד אינטרסים:** המחברים מצהירים כל המחקר נערך בהעדר כי קשר מסחרי או פיננסי שיכול להתפרש כניגוד אינטרסים פוטנציאלי.

**זכויות יוצרים © 2023 © Alon 2023.** זהו מאמר בגישה פתוחה שמופץ תחת תנאי רישיון [Creative Commons Attribution License \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). השימוש, ההפצה או ההעתקה מותרים לשימוש בפורומים אחרים ובלבד שיינתן קרדיט למחברים המקוריים ולבעל זכויות היוצרים, ושהפרסום המקורי בעיתון זה מצוטט בהתאם למקובל באקדמיה. השימוש, ההפצה או ההעתקה אינם מותרים אם הם אינם עומדים בתנאים אלה.

## סוקרים צעירים

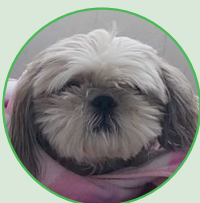
**MAOR, גיל: 13**

אני מאוד אוהבת ללמוד על נושאים שונים, בעיקר בנושאי מדעי החברה והרוח. אני חובבת קריאה (גם ספרות עיונית) וכותבת הרבה (זכיתי בתחרות הכתיבה הארצית בכיתה ג', על שיר שכתבתי, ועד היום אני גם כותבת שירים). וממש שמחה לקחת חלק במיזם הזה!

## הכותבים

**NOGA ALON**

פרופסור נוגה אלון הוא פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פרינסטון (ניו ג'רזי, ארה"ב) ופרופסור אֶמְרִיטוּס למתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת תל אביב (ישראל). עבודתו מתרכזת בעיקר בקומבינטוריקה, בתורת הגרפים, וביישומים שלהן במדעי המחשב. פרופסור אלון בוגר תואר



ראשון במתמטיקה מהטכניון, תואר שני במתמטיקה מאוניברסיטת תל אביב, ודוקטורט במתמטיקה מהאוניברסיטה העברית בירושלים. כיהן במשרות שונות במכוני מחקר רבים בארה"ב, לרבות המכון הטכנולוגי של מסצ'וסטס (MIT); אוניברסיטת הרווארד; המכון למחקר מתקדם בפרינסטון; מרכז מחקר של יב"מ (IBM Almaden Research Center); מעבדות בֶּל (Bell), וחטיבת המחקר של מיקרוסופט (Microsoft Research). פרופסור אלון הצטרף לאוניברסיטת תל אביב כחבר סגל בשנת 1985, ועבר לאוניברסיטת פרינסטון בשנת 2018. במהלך הקריירה שלו, כיהן כראש בית הספר למדעי המתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, וכעורך של כתבי עת בינלאומיים מדעיים רבים. פרסם ספר מדעי אחד, ויותר מ-600 מאמרים מדעיים. פרופסור אלון זכה במגוון פרסים בהם פרס ארדש (1989); פרס פוליה (2000); פרס גֶּדל (2005); פרס לנדאו (2005); פרס ישראל (2008); פרס א.מ.ת. (2011) ופרס שאו (2022). הוא נשוי לנורית ואב לשלוש בנות. \* [nalon@math.princeton.edu](mailto:nalon@math.princeton.edu)

מוזיאון המדע ע"ש בלומפילד ירושלים  
متحف العلوم على اسم بلومفيلد القدس  
Bloomfield Science Museum Jerusalem



הוצאת פרונטירז מדע לצעירים ישראל  
Hebrew version provided by



THE SAGOL NETWORK