

## גיבור מהמזרח: כיצד האפס הגיע למערב

Miriam R. Aczel<sup>1\*</sup>, Debra Aczel<sup>2</sup>, Marina Ville<sup>3</sup>

<sup>1</sup>המרכז למדיניות סביבתית, אימפריאל קולג' לונדון, לונדון, בריטניה  
<sup>2</sup>תוכנית טרסקופ, המכון הטכנולוגי של מסצ'וסטס, קיימברידג', מסצ'וסטס, ארצות הברית  
<sup>3</sup>המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת טורס, טורס, צרפת

### סוקרות צעירות

MAREN  
גיל: 10



RYKA  
גיל: 11



בעוד שהבבלים, היוונים והרומאים היו מסוגלים לבצע חישובים מתוחכמים להפליא, ההתפתחות המתמטית הייתה מוגבלת עד להכרת האפס האמיתי. במאמר זה אנו נסביר מדוע האפס הוא התפתחות חשובה כל כך. ננסה לענות על השאלה: מהיכן הגיע האפס, ובן כמה הרעיון של אפס? ישנן ראיות חזקות לכך שהאפס הוא התפתחות מזרחית שהגיע למערב מהודו או מציוויליזציה עם שורשים בהודו, כמו למשל קמבודיה. משמעות הדבר היא שהאפס הוא לא המצאה יוונית או מערבית, כפי שמשכילים נהגו לחשוב. מתמטיקה היא מסתורין נפלא – הרבה שאלות נותרו לגבי כיצד ומדוע האפס התפתח במערב, וכיצד הוא הגיע לאירופה.

### האפס – גיבור אמיתי!

דמיינו לרגע כיצד החיים שלכם היו נראים ללא העיגול הקטן הזה שאנו משתמשים בו לייצוג האפס!

בעוד שבדרך כלל אנו לוקחים את האפס כמובן מאליו, זו המצאה חדשה יחסית. לבבלים ולרומאים לא הייתה דרך לייצג את האפס עם סמל מובחן; וגם לא ליוונים, שלא חשבו ש"כלום"

<sup>1</sup>המאמר של Ifrah [1] הוא הקדמה טובה להיסטוריה המלאה של מספרים "מפריהיסטוריה למחשבים!"

<sup>2</sup><http://www.amathsdictionaryforkids.com/qr/b/base10system.html>

### מערכת בסיס 60 – סקסגסימלי [Base 60 (Sexagesimal) System]

מערכת מספרים קדומה שהשתמשה בשישים כבסיס שלה. המערכת שימשה את הסומריאנים הקדומים באלף השלישי לפני הספירה, הועברה הלאה לבבלים הקדומים, ונמצאת כיום בשימוש למדידת זמן, זוויות, וקואורדינטות גיאוגרפיות.

### מערכת בסיס 10 – דצימלי [Base 10 (Decimal) System]

מערכת המספרים הנוכחית שלנו היא מערכת בסיס 10, שמכילה 10 ספרות ומשתמשת בערך מיקום ובנקודה עשרונית כדי להפריד מספרים שלמים משברים עשרוניים.

### שומר מקום (Placeholder)

מספר שאין לו ערך משלו, והוא משתמש במספרים דצימליים ובקווי מספרים כדי להראות את הערך של מספרים אחרים.

הוא מספר. בני המאיה שחיו במרכז אמריקה השתמשו ברעיון של אפס [1]<sup>1</sup> במערכת לוח השנה שלהם, אולם מאחר שהם היו מבודדים מאנשים אחרים, האפס שלהם לא הגיע מעבר לציוויליזציה שלהם. כדי למצוא מקור לאפס, עלינו לחפש במקום אחר.

בואו נסתכל על מספרים ששימשו בבבל העתיקה, שם הייתה מערכת מתמטיקה מתוחכמת לפני יותר מ-5,000 שנים. המערכת הזו התפתחה ושוכללה ממערכות עתיקות עוד יותר של כתיבת מספרים וביצוע חישובים! אנו יודעים על המערכת הבבלית מאחר שהם כתבו על לוחות חימר ששרדו עד היום. הבבלים היו מתמטיקאים ואסטרונומים טובים, שהשתמשו במערכת **בסיס 60** מורכבת, ולא במערכת **בסיס 10** כמו שלנו<sup>2</sup>. במתמטיקה המודרנית, אנו עדיין משתמשים בבסיס 60 לתפקודים מסוימים. לדוגמה, חשבו על האופן שבו אנו מודדים זמן: 60 שניות הן דקה אחת, 60 דקות הן שעה אחת. הבבלים, כמונו, השתמשו במיקומים (כמו אלה שבבסיס 10 שלנו, שמציינים אחדות, עשרות, מאות, אלפים וכן הלאה) כדי לייצג מספרים. אולם שימוש במערכת בסיס 60 משמעותו שהחישובים והמעקב אחרי מיקומים היו מורכבים יותר. במערכת בסיס 60, מיקומים ייצגו 6 אחדות, שישים, שש מאות, שישה אלפים, וכולי. דמיינו שאתם מנסים לעקוב אחרי מיקומים בלי שיש לכם את סמל האפס שמסמן רווח. סמל האפס הקטן הזה שימושי ביותר. הבבלים בסופו של דבר החלו לסמן את הטור הריק באמצעות רווח, אולם חשבו עד כמה קל לפספס רווח בטורים של מספרים. עם המערכת המורכבת שלהם, הבבלים היו צריכים להסתמך על ההקשר כדי להבין את משמעות המספר. כדוגמה לשימוש בהקשר, אם מישהו אומר לכם שמהו עולה ארבע וחמישים, אתם תניחו שמדובר ב-4.50 שקלים, אם אתם חושבים על הזמנת גלידה, ולא 450 שקלים, מה שעשוי להיות הגיוני אם הייתם קונים כרטיס טיסה.

היוונים הכירו את האפס כרעיון, אולם לא חשבו עליו כמספר עם אותה השימושיות במתמטיקה כמו הספרות 0-9. לפי אריסטו, לא היה אפשרי לחלק ב-0 ולקבל תוצאה משמעותית, אז המערכת היוונית הייתה מבוססת על 9 מספרים – בלי 0.

הרומאים לא השתמשו במספרים לחישובים, לכן לא היה להם צורך במספר אפס כשומר מקום או כמייצב עמודה ריקה. מערכת המספרים הרומית שימשה למסחר, והם לא היו צריכים לייצר את המספר אפס באמצעות סמל מיוחד. הם השתמשו בלוח ספירה עבור חישובים, והמספרים שלהם שימשו רק לכתיבת תוצאות. זה לא אומר שהם לא הבינו את מושג הכלום. הייתה להם מילה שמשמעותה כלום, אולם לא היה לה סמל.

## סופר אפס!

מדוע אכפת לנו מהאפס? אפס יכול לשמש כשומר מקום, ללא ערכים משל עצמו, או כמספר מתמטי. לדוגמה, כשאנו משיימים שנים, כמו למשל 2019, לכל מספר יש את המקום המוגדר שלו. אנו קוראים לאפס שומר מקום מאחר שהוא אומר לנו כמה שנים יש. אנו יכולים לייצג את המערכת שלנו, בבסיס 10, באמצעות עמודות כפי שאפשר לראות כאן:

1000s 100s 10s 1s

2 0 1 9

ה-0 שומר על כל ספרת 1 במקום שלה, כך שנדע מה הערך שלה (1, 10, 100, 1,000). אם תמחקו את שומר המקום הזה, כבר לא יהיה ברור לאיזה מספר מתכוונים.

אפס יכול להיות יותר מאשר רק שומר מקום. אפס גם מסמל את נקודת החלוקה בין מספרים חיוביים ושיליים. אם אנו סופרים לאחור באמצעות **מספרים שלמים**, אנו מגיעים לאפס. באופן דומה, אם אנו סופרים קדימה עם מספרים שליליים, אנו גם מגיעים ל-0.

$$\Leftarrow -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 \mathbf{0} 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 \Rightarrow$$

כל עוד אתם רק רוצים לספור ולמדוד, אתם יכולים לעשות את זה בלי אפס. אולם בלי אפס, מתמטיקה מתקדמת לא תהיה אפשרית: אין אלגברה, אין חשבון אינפיניטסימלי, ולא היו לנו מחשבים, מאחר שמחשבים משתמשים בבסיס בינרי, או **מערכת בסיס 2**, מה שאומר שהמידע נרשם ונקרא כסדרה של הספרות 0 ו-1.

## מי המציא את האפס?

ערבים בימי הביניים – מאות רבות אחרי העידן המתקדם ביותר של מתמטיקה יונית – היו גם מתמטיקאים יוצאי דופן וגם מעבירים חשובים של ידע עתיק, כולל מתמטיקה. מוחמד איבן מוסא אל-קוורזמי היה מתמטיקאי פרסי ידוע, אסטרונום וגיאוגרף אשר תרם רבות להבנה המודרנית שלנו של מתמטיקה, במיוחד לתחומים של אלגברה וטריגונומטריה. שמו – אל-קוורזמי – בסופו של דבר נהפך לאלגוריתמי כשהוא תורגם ללטינית. מהגרסה הלטינית של השם שלו אנו מקבלים את המילה אלגוריתם, שמשמעותה סֶט של חוקים שאנו עוקבים אחריהם כשאנו מבצעים חישובים. בתחילת המאה התשיעית אחרי הספירה, אל-קוורזמי היה אסטרונום מוביל וספרן בבית החוכמה המפורסם בבגדד, שם הוא חקר כתבי יד מדעיים ומתמטיים, כולל אלה של היוונים וההודים הקדומים.

בכתבו *Al'Khwarizmi on the Hindu Art of Reckoning*, הוא תיאר מערכת מספרים הודית או אינדיאנית שמבוססת על 10 מספרים: 0-9. הוא נותן קרדיט למספר אפס, ואומר שהוא גילה אותו כשהוא תרגם את העבודות המתמטיות של משכיל הודי מהמאה השביעית בשם ברהמהגופטה. המערכת השימושית הזו אומצה במהרה על-ידי העולם הערבי.

## האפס עושה דרך ארוכה לאירופה

אירופאים בימי הביניים עדיין קיימו עסקים באמצעות מספרים רומיים. אולם דרכי מסחר עשו יותר משינוע של משי ותבלינים מהמזרח למערב – הם גם שינועו ידע. פיבונאצ'י, בנו של סוחר איטלקי, לעיתים קרובות טייל עבור העסק של אביו. בצפון אפריקה, הוא גילה שהסוחרים הערבים השתמשו במערכת ספירה שמבוססת על 10 מספרים, 0-9. הוא הבין במהרה שהמערכת הזו תשפר את ראיית החשבון ואת החשבונאות באירופה. ב-1202 הוא פרסם ספר שנקרא *Liber Abaci*, שהפיץ את הרעיון של מערכת המספרים החדשה הזו שהיה בה 0 כדי "לשמור על השורות". הספר דיבר על היישומים השימושיים של המערכת הזו: כיצד להמיר מטבע אחד לאחר, חישובים של רווחים והפסדים וצרכים עסקיים חשובים אחרים [2].

### מספרים שלמים (Whole Numbers)

מספרים לא עשרוניים, או לא שברים, כמו למשל 1, 2, 3 וכן הלאה.

### מערכת בסיס 2 – בינרי [Base 2 (Binary) System]

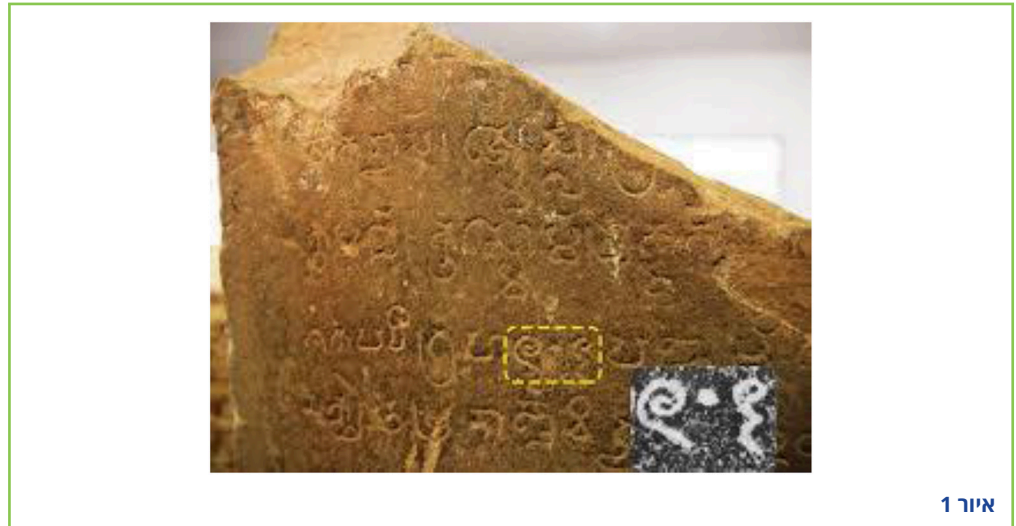
מערכת שבה המידע יכול להיות מיוצג על-ידי שילובים של הספרות 0 ו-1.

### ימי הביניים (Middle Ages)

תקופת זמן בהיסטוריה האירופית מנפילתה של האימפריה הרומית במערב (בסביבות שנת 1100) עד לנפילתה של קונסטנטינופול (1453).

**איור 1**

אפס בתפקיד  
נקודה ב-K-127. הנדלה של  
תאריך שמוצג על K-127 עם  
אפס שמוצג כנקודה.



איור 1

**החיפוש עובר להודו ולקמבודיה**

ג'ורג'ס קודס היה בשנות ה-20 המוקדמות שלו כשהוא ביקר באוסף 'המזרח הקרוב' במוזיאון הלובר, המוזיאון המפורסם בפריז ליד מקום מגוריו. הוא התעניין בכתובת הבבלית העתיקה בתצוגה. החוויה מוקדמת הזו הובילה אותו לחקור שפות עתיקות, ולבלות את חייו בחשיפת תעלומות שנכללו בכתובות מדרום-מזרח אסיה.

לקודס הייתה תיאוריה מסקרנת. הוא האמין שמספרים הגיעו מציוויליזציות דרך אסיה, שחלקן תרבות משותפת שהתבססה על דתות הבודהיזם וההינדואיזם. משכילים אחרים באותו הזמן הניחו שמספרים הגיעו מיוון או מערב הסעודית, אולם קודס הרגיש שהאמונה הזו כשלה בהערכת ההתפתחויות האינטלקטואליות במזרח. בנקודה הזו, לקודס לא הייתה הוכחה לתיאוריה שלו. לאחר מכן, במהלך עבודתו, הוא נתקל בכתובת לא מתורגמת שנמצאה על אבן שהוא קרא לה K-127, ממקדש עתיק בסאמבור שבמקונג, קמבודיה. בעת תרגום הכתוב, הוא היה המום לגלות שהיא הכילה את האפס החמקמק שהוא קיווה למצוא! (איורים 1, 2).

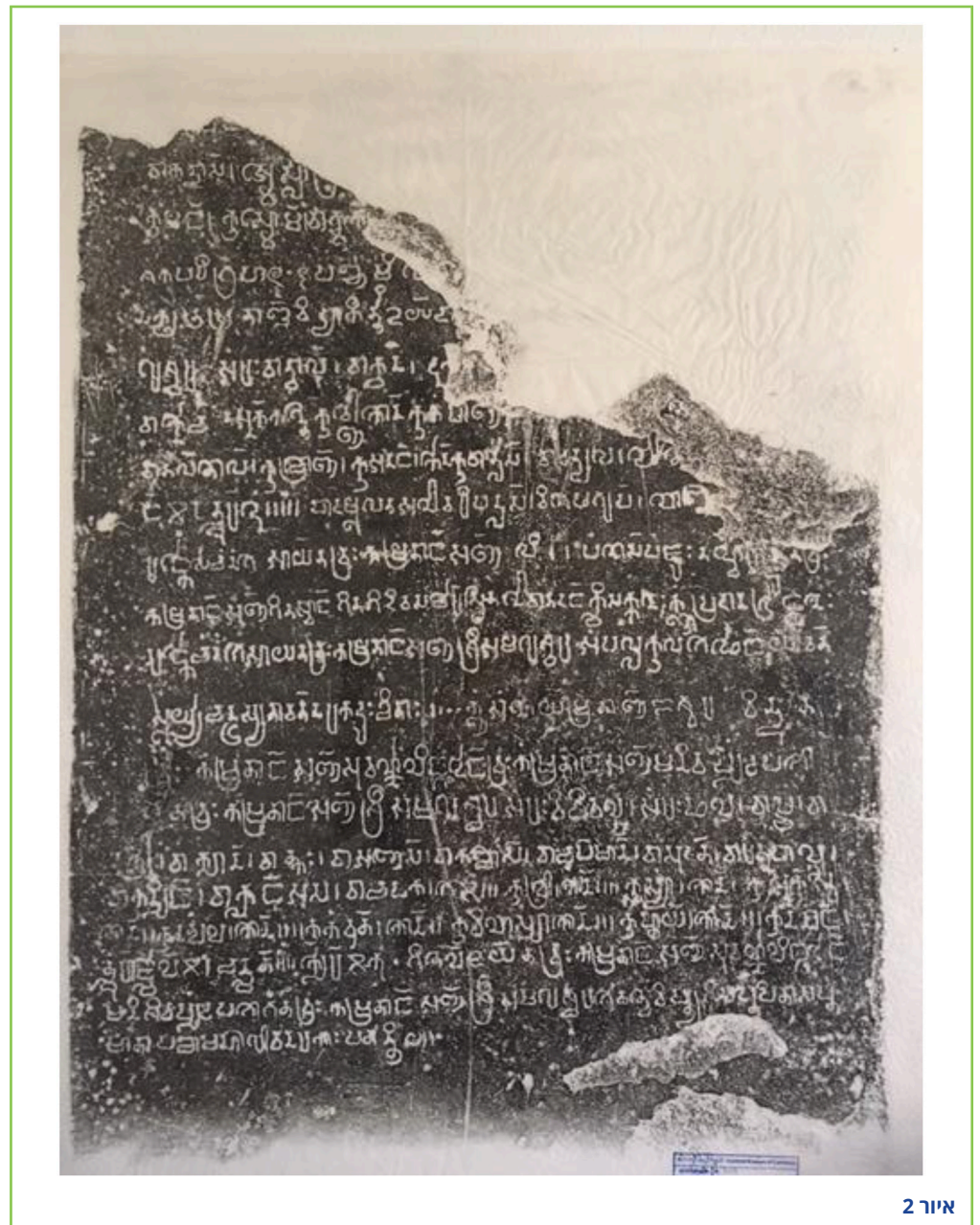
הכתובת תיארה העברה של סחורה, וכללה תאריך עם אפס - אפס שומר מקום - שיוצג כנקודה קטנה! מי שחקק את הכתובת, הוסיף באופן נוח את התאריך: 605 של עידן çaka. המרת עידן çaka למערכת לוח השנה שלנו לא הייתה קשה. קודס ידע שהמלך הראשון בעידן çaka התחיל למלוך בשנת 78, אז על-ידי חיבור 78 ל-605 שעל האבן, הוא ידע שהכתובת נוצרה בשנת 683 אחרי הספירה. קודס מצא את ההוכחה שלו, שפורסמה בשנת 1931 בעיתון מדעי [3]. זה הוכיח שהאפס התחיל במזרח, מאחר שהאפס הזה נמצא בקמבודיה ונחקק לפני עבודתם של מתמטיקאים ערבים. הממצא המוקדם הזה הוכיח שלספרות הכתובות שלנו ולאפס היה מקור מזרחי, אסיאתי [4].

**תפנית נוספת בתיאוריית המספרים שלנו**

כ-40 שנים לפני שקודס תרגם את K-127, כתב יד שנכתב על ידי בירץ' בארק, שנקרא כתב יד בקשהלי, נמצא בבקשהלי, שכיום נמצאת בפקיסטן. הטקסט הזה הכיל אפס ישן שיוצג

**איור 2**

העתקה לנייר של K-127 שבוצעה על-ידי המוזיאון הלאומי של קמבודיה ב-2015. K-127, כתובת עתיקה שנמצאה בקמבודיה עם אחד מהאפסים העתיקים ביותר שידועים.



**איור 2**

על-ידי עיגול קטן. גילו של האפס הזה לא היה ידוע, אולם מומחים מסוימים מאמינים שהוא עתיק מאוד. שלא כמו K-127, כתב היד הזה לא כלל באופן נוח תאריך בתוך הטקסט, ולכן היה קשה לקבוע מתי הוא נכתב. נוסף על כך משכילים האמינו שחלקים מכתב היד נכתבו בזמנים שונים.

כיום, בקשהלי נמצא בספריית הבודליאנה באוניברסיטת אוקספורד. בשנת 2017 [5], בודליאנה אישרה שפיסה קטנה מחומר כתב היד של בארק תוסר עבור **תארוך פחמן 14**. התוצאות הצביעו על כך שהחלק בכתב היד שהכיל את האפס מתוארך לזמן שבין המאה השלישית לרביעית. אם זה נכון, כתב היד בקשהלי עתיק יותר מ-K-127, ועתיק יותר מכל כתובת שמכילה אפס שהתגלתה עד היום. חלק מהמומחים אינם משוכנעים. הוויכוח הוא שהחלק הזה שהוסר עבור בדיקה לא הכיל כתב - ומאחר שמאמינים שהעמודים נכתבו

**תארוך פחמן-14 (Radiocarbon Dating)**

שיטה מדעית שמשמשת לקביעת הגיל של אובייקט, בהתבסס על איזוטופ רדיואקטיבי של פחמן.

בזמנים שונים, זה עורר בעיה. מדענים מקווים שספריית בודליאנה תערוך מבחנים נוספים על חלקים אחרים של כתב היד. שאלות רבות נותרות – עד כמה השיטה שמשמשת לתארוך כתב היד מדויקת? האם יתגלו אפסים אחרים, עתיקים יותר? ולבסוף, כיצד הרעיון של האפס זז מהודו לקמבודיה ולאינדונזיה, ואז התפשט לשאר העולם? מה שאנו יודעים זה שהאפס שאנו משתמשים בו כיום נולד באסיה הדרומית! אנו מקווים שהיסטוריונים של המתמטיקה יחברו בעתיד עוד פיסות בפאזל המסקרן הזה.

## סוף הסיפור?

אז מדוע התרבות ההודית המציאה את האפס? בעוד שיוונים האמינו שאפס הוא כלום, הכלום היה חשוב מאוד לדתות מזרחיות מסוימות, כולל בודהיזם והינדואיזם. אולי הדת והפילוסופיה ההודית מהוות רמז. בכל מקרה, מתמטיקה – ומספרים – כוללים הרבה שאלות שרק מחכות שתחקרו אותן.

## מקורות

1. Ifrah, G. 2000. *The Universal History of Numbers*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.
2. Walker Publishing Co. 2011. *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. London: Walker Publishing Co.
3. Coedès, G. 1931. A propos de l'origine des chiffres arabes. *Bull. School Orient. Stud.* 6:323–8.
4. Coedès, G. 1968. *The Indianized States of Southeast Asia*. Honolulu, HI: University of Hawaii Press.
5. Oxford University News. 2017. *Earliest Recorded Use of Zero Is Centuries Older Than First Thought*. Available online at: <http://www.ox.ac.uk/news/2017-09-14-earliest-recorded-use-zero-centuries-older-first-thought>

פורסם אונליין: 22 ביוני 2021

נערך על ידי: Marco Aldi, Virginia Commonwealth University, United States

ציטוט: Aczel MR, Aczel D and Ville M (2021) גיבור מהמזרח: כיצד האפס הגיע למערב. *Front. Young Minds*. doi: 10.3389/frym.2019.00128-he

### תורגם והותאם:

Aczel MR, Aczel D and Ville M (2019) Hero From the East: How Zero Came to the West. *Front. Young Minds* 7:128. doi: 10.3389/frym.2019.00128

הצהרת ניגוד אינטרסים: המחברים מצהירים כי המחקר נערך בהעדר כל קשר מסחרי או פיננסי שיכול להתפרש כניגוד אינטרסים פוטנציאלי.

Aczel, Aczel and Ville 2021 © 2019 © **COPYRIGHT** רישיון Creative Commons Attribution License (CC BY). השימוש, ההפצה או ההעתקה מותרים לשימוש בפורומים אחרים ובלבד שיינתן קרדיט למחברים (המקוריים ולבעל זכויות היוצרים, ושהפרסום המקורי בעיתון זה מצוטט בהתאם למקובל באקדמיה. השימוש, ההפצה או ההעתקה אינם מותרים אם הם אינם עומדים בתנאים אלה.

## סוקרות צעירות

### MAREN, גיל: 10

אני תלמידה שאוהבת ללמוד, לקרוא ולכתוב. אני מנגנת על פסנתר וכינור. אני אוהבת מדע ומתמטיקה בבית הספר, ולקרוא ספרים ולצפות בסרטים בבית.



### RYKA, גיל: 11

אני Ryka. אני בת 11 ואני אוהבת מאוד מדעי המחשב ומתמטיקה. כשאגדל, אני רוצה ליצור הרבה משחקי מחשב ולהיות בעלת חברת גיימינג משלי. אני אוהבת לסקור מאמרים לעיתון, כי המאמרים כל כך מגניבים! אני תוהה כיצד כותבים אותם? אני גם רוצה לכתוב הרבה מאמרים, אבל אני פוחדת. מה אם אנשים לא יאהבו את המאמרים שלי? טוב, נו, כנראה שאנסה בכל מקרה.



## הכותבים

### MIRIAM R. ACZEL

אני מלגאית נשיא ודוקטורנטית באימפריאל קולג' לונדון. המחקר שלי מסתכל על האופן שבו קדיחות בסלע עבור מציאת גז טבעי משפיעות גם על בריאות בני אדם ועל הסביבה. אני גם המקימה השותפה והמנהלת השותפה של Amir D. Aczel Foundation for Research and Education in Science and Mathematics, אשר פועל לעודד אנשים צעירים בקמבודיה ללמוד מדע ומתמטיקה. יש לי תשוקה לכתובה מדעית, וכיום אני מכהנת כמנהלת של Communications for Leaders in Energy, ארגון סביבתי ללא מטרות רווח שממוקם בווישינגטון די.סי. נולדתי ביום כדור הארץ, אז באופן טבעי אני אוהבת להיות בחוץ ולחפש כל תירוץ לבלות זמן עם חיות מכל הגדלים והצורות! [\\*miriam.aczel14@imperial.ac.uk](mailto:miriam.aczel14@imperial.ac.uk)



### DEBRA ACZEL

Debra הייתה יועצת לתלמידי שנה ראשונה במכון הטכנולוגי של מסצ'וסטס (MIT) במשך 25 שנים, כולל בתוכניות שבהן סטודנטים היו צריכים להציע פתרונות לבעיות המתגרות ביותר בעולם: כיצד אנו יכולים לוודא שיהיה לכולם מספיק אוכל? מה אנו צריכים לעשות בנוגע לשינויי האקלים? כדי "לבחון" את הפתרונות שלהם, בכל שנה Debra לקחה סטודנטים לדבר עם אנשים שיהיו מושפעים מההצעות שלהם: להודו, כדי לראות כיצד כפרים קטנים מזינים את הקהילה שלהם, ולדרום אפריקה כדי ללמוד על גישה למים. היא מנהלת שותפה של קרן Amir D. Aczel Foundation for Research and Education in Science and Mathematics, ארגון ללא מטרות רווח שפועל לתמיכה בחינוך מתמטי בקמבודיה.



### MARINA VILLE

Marina Ville היא מתמטיקאית צרפתייה שבילתה עשר שנים בישראל ועוד עשר שנים בבוסטון; כיום היא גרה שוב בפריז ועובדת באוניברסיטת טורס, צרפת. היא עוסקת בלימודי הגיאומטריה וחוקרת כל מיני סוגי צורות, כולל שכבות סבון וקשרים. Marina אוהבת לחלוק רעיונות עם קולגות וגם לשבת לבד בבית קפה עם



בעיה מאתגרת: לעיתים היא מבצעת את אותו החשבון עשרים פעמים, ובפעם העשרים ואחת היא פתאום רואה את דרכה החוצה מהמבוך.

Hebrew version  
provided by

מזיאון המדע ע"ש בלומפילד ירושלים (ער.)  
متحف العلوم على اسم بلومفيلد القدس  
Bloomfield Science Museum Jerusalem

