

## אינסוף, וניסיון לפתור תרגילי חשבון בעזרתו

Florian Bouyer\*

בית הספר למתמטיקה, אוניברסיטת בריסטול, בריסטול, הממלכה המאוחדת

### סוקר צעיר



RIK  
גיל: 13

האם כשהייתם קטנים, שיחקתם משחק שבו כל אחד צריך להגיד את המספר הגבוה ביותר שהוא יכול לחשוב עליו? כמה מהר מישהו אומר "אינסוף"? ואז, מישהו אחר אומר: "אינסוף ועוד אחת", ונראה שהמשחק לעולם לא יסתיים. האם "אינסוף ועוד אחת" באמת גדול יותר מ"אינסוף"? האם אפשר לפתור תרגילי חשבון עם "אינסוף"? גיאורג קנטור (1845-1918) היה אחד המתמטיקאים הראשונים שחקר את המושג "אינסוף". הוא חשב על דוגמאות שונות שבהן ה"אינסוף" מופיע במתמטיקה. הוא גם גילה שיש סוגי "אינסוף" שונים. הדבר גרם למתמטיקאים אחרים להתייחס אל עבודתו בזלזול, כעבודה שגויה ומבלבלת. בשנת 1924, היה זה דויד הילברט שגרם ל"אינסוף" להיות מובן, בעזרת "פְּרֻדְוֹקְס הַמְּלֹן הַאינסופי". ההסבר שלו היה סיפור על מלון שגם כאשר הוא בתפוסה מלאה יש בו מקום לאורחים נוספים. במאמר זה אנסה להסביר את המושג "אינסוף" בצורה דומה.

### הקדמה: קרדינליות, שפירושה ספירה

המושג "אינסוף" הוא מוזר, ובלבל מתמטיקאים שעסקו בו. הבנתו מושגת באופן טבעי כאשר אנו מבינים לראשונה שאפשר להמשיך ולספור לְנֶצַח. כדי לעזור לנו להבין את

ההתנהגות המוזרה של ה"אינסוף", חזרו מתמטיקאים ליסודות, וניסו להגדיר מהי משמעות פעולת הספירה.

תארו לעצמכם שיש לכם תיק מלא בממתקים. אינכם יכולים לראות את תוכן התיק, אבל ברצונכם לדעת כמה ממתקים יש לכם. הדרך הטובה ביותר לעשות זאת היא להושיט יד לתוך התיק, להוציא את הממתק הראשון ולומר: "אחת". אחר כך, להוציא ממתק שני ולומר: "שניים". תמשיכו לעשות זאת, עד שהתיק יתרוקן. המספר האחרון שתאמרו הוא מְנִין הממתקים שהיו בתיק. כך אנו לומדים לספור, ולא משנה מהם הפריטים שנמצאים בתיק שלכם.

הגדרה: קרדינליות

## קרדינליות (Cardinality)

מְנִין הפריטים הנמצאים בתיק.

<sup>1</sup>במתמטיקה, אנו משתמשים במילה "קבוצה" כשאנו מתכוונים לתיק מלא פריטים.

ה**קרדינליות** של תיק מלא פריטים<sup>1</sup> היא מְנִין הפריטים שיש בתיק. זאת אפשר לקבוע על-ידי ספירת מְנִין הפריטים הנמצאים בתיק.

למשל, הקרדינליות של תיק המכיל שלושה ממתקים היא 3. גם הקרדינליות של תיק שבתוכו יש ממתק אחד, רובוט אחד ועיפרון אחד היא 3. לא חשוב מהם הפריטים שבתיק, רק המספר חשוב. התיק יכול להכיל פריטים מופשטים יותר, למשל: תיק המכיל את המספרים 1, 2 ו-3.

שני תיקים שיש להם את אותה קרדינליות יכולו את אותו מְנִין פריטים. אנו יכולים לסדר את הפריטים מְשֻׁנֵי התיקים בזוגות, בלי שישאר פריט כלשהו באחד התיקים. זוהי דרך נוספת לספור פריטים. אם אנו יודעים מהי הקרדינליות של תיק אחד, אבל לא את הקרדינליות של התיק האחר, אנו יכולים לבדוק אם אפשר לסדר את הפריטים בזוגות, כך שבכל זוג יש פריט אחד מכל תיק.

למשל, יש לכם תיק המכיל ממתקים, אבל אינכם יודעים כמה ממתקים יש בתוכו. הפעם, גם יש לכם 8 חברים. אם תוכלו לתת לכל אחד משמונת החברים שלכם בדיוק ממתק אחד, בלי שישארו ממתקים בתיק, אז הקרדינליות של תיק הממתקים היא 8. אם לפחות חבר אחד לא קיבל ממתק, אז הקרדינליות של התיק קטנה מ-8. אם לפחות ממתק אחד נותר בתוך התיק, אז הקרדינליות של התיק גדולה מ-8.

## קבוצה בַת מְנִיָה אינסופית

תארו לעצמכם עכשיו תיק המכיל את  $\aleph_1$  המספרים החיוביים: 1, 2, 3, 4 וכן הלאה. אנו משתמשים בסימן  $\aleph$ , כשהכוונה היא לתיק זה.<sup>2</sup> מהי הקרדינליות של התיק  $\aleph$ ? ודאי שהקרדינליות אינה ארבע, נֶשֶׁן  $\aleph$  מכיל לפחות חמישה פריטים, כלומר: המספרים 1, 2, 3, 4 ו-5. אותו היגיון חל על כל מספר שהוא. אם תבחרו מספר כלשהו, למשל  $n$ , אז התיק  $\aleph$  יכול לפחות  $n+1$  פריטים, כלומר: המספרים 1, 2, 3, ...,  $n-1$  ו- $n$ . מכאן, הקרדינליות של  $\aleph$  אינה מספר, ואנו אומרים כי  $\aleph$  הוא **קבוצה בַת מְנִיָה אינסופית**.<sup>3</sup>

הגדרה: קבוצה בַת מְנִיָה אינסופית

$\aleph$

"המספרים הטבעיים", תיק המכיל את כל המספרים החיוביים: 1, 2, 3, 4, וכן הלאה.

<sup>2</sup>מדובר באות  $\aleph$  מודגשת. היא מסמלת "מספרים טבעיים" (natural numbers).

<sup>3</sup>אנו משתמשים במילים "בַת מְנִיָה" (countably) כי יש סוגים נוספים של אינסוף שהם גדולים יותר מבַת מְנִיָה אינסופית לאין שיעור (אינפיניטסימלית).

## קבוצה בת מנייה אינסופית

### (Countably infinite)

תיק המכיל אינסוף פריטים, אבל עדיין אנו יכולים לספור את הפריטים. במילים אחרות: תיק שהקרדינליות שלו זקה לזו של תיק  $\mathbb{N}$ .

תיק המכיל פריטים יהיה קבוצה בת מנייה אינסופית אם תהיה לו אותה קרדינליות כמו  $\mathbb{N}$ . במילים אחרות:

- (1) התיק מכיל אינסוף פריטים, כך שנוכל להוציא ממנו משהו לנצח.
- (2) נוכל לסדר בזוגות כל פריט שבתיק עם מספר שלם חיובי מסוים (זוהי דרך אחרת לומר שאפשר לספור את הפריטים).

### דוגמה 1: מספרים זוגיים

תארו לעצמכם שני תיקים. אחד המכיל את כל המספרים החיוביים, שנקרא  $\mathbb{N}$ , ואחד המכיל את כל המספרים הזוגיים, שנקרא  $2\mathbb{N}$ . טבעי יהיה לחשוב כי יש יותר מספרים חיוביים מאשר מספרים חיוביים זוגיים, אבל אנו נראה שאפשר לסדר בזוגות כל מספר זוגי עם מספר חיובי אחד מסוים, כך שבשני התיקים לא יישארו מספרים ללא בן זוג. הדבר יוכיח כי ל- $\mathbb{N}$  ול- $2\mathbb{N}$  יש את אותה קרדינליות.

בטרם נעשה זאת, אנו זקוקים לדרך שתאפשר לנו להבחין בין המספרים שניקח מתיק  $\mathbb{N}$  ובין המספרים שניקח מתיק  $2\mathbb{N}$ . הוספנו את הסימון "י" לכל מספר שהוצאנו מתיק  $\mathbb{N}$ . דוגמאות:

- 6-י הוא מספר מ- $\mathbb{N}$  ו-6 הוא מספר זוגי מ- $2\mathbb{N}$ .
- 7-י הוא מספר מ- $\mathbb{N}$ , אבל היות שהמספר 7 אינו זוגי, הוא אינו מצוי בתיק  $2\mathbb{N}$ .

הדרך ליצור זוגות בין מספרים מ- $\mathbb{N}$  ומ- $2\mathbb{N}$  היא לומר: המספר n-י נמצא בזוג עם המספר הזוגי  $2n$ . למשל:

- המספר 4-י נמצא בזוג עם המספר הזוגי 8.
- המספר 5-י נמצא בזוג עם המספר הזוגי 10.
- המספר 57-י נמצא בזוג עם המספר הזוגי 114.

אנו רואים שכל מספר מ- $\mathbb{N}$  נמצא בזוג עם מספר זוגי. אנו גם רואים שכל מספר זוגי נמצא בזוג עם מספר כלשהו, כי המספר הזוגי n נמצא בזוג עם המספר (n:2)-י. משמעות הדבר היא שהצלחנו לסדר בזוגות כל מספר מ- $\mathbb{N}$  עם מספר מ- $2\mathbb{N}$ , ולא נותרו מספרים ללא בן זוג (איור 1). לפיכך, ל- $\mathbb{N}$  ול- $2\mathbb{N}$  יש את אותה קרדינליות. תיק המספרים הזוגיים הוא קבוצה בת מנייה אינסופית. כלומר: מניין המספרים החיוביים זהה למניין המספרים החיוביים הזוגיים.

## חיבור אחת ועוד אינסוף

דוגמה 2: תארו לעצמכם שני תיקים, שבשניהם נמצאים כל המספרים החיוביים. כרגע, בשני התיקים יש את אותו מניין של פריטים (שניהם קבוצה בת מנייה אינסופית). עכשיו, הוסיפו פריט

**איור 1**

כל מספר מ- $\mathbb{N}$  נמצא בזוג עם מספר אחד מסוים מ- $2\mathbb{N}$ . כך, מִגִּין המספרים החיוביים זהה למִגִּין המספרים החיוביים הזוגיים. מספרים זוגיים = Even numbers



איור 1

אחד, את האות A, לתיק השני. האם בתיק השני יש יותר פריטים מאשר בתיק הראשון? לא, למעשה יש בשניהם את אותו מִגִּין פריטים. כמו קודם, נקרא לתיק הראשון  $\mathbb{N}$ , ונוסיף "י" לסוף של כל מספר שנמצא בתיק. לתיק השני, המכיל A, 1, 2, 3 וכן הלאה, נקרא  $\mathbb{N}_0$ . נסדר בזוגות כל פריט מתיק  $\mathbb{N}$  עם פריט יחיד מתיק  $\mathbb{N}_0$ , תוך שימוש בשני חוקים:

(1) המספר 1-י יימצא בזוג עם האות A מ- $\mathbb{N}_0$ .

(2) כאשר n אינו 1, המספר n-י יימצא בזוג עם המספר n-1 מ- $\mathbb{N}_0$ .

דוגמאות:

- המספר 1-י יימצא בזוג עם האות A.
- המספר 5-י יימצא בזוג עם המספר 4.
- המספר 30-י יימצא בזוג עם המספר 29.

באופן זה, כל פריט מ- $\mathbb{N}$  יימצא בזוג עם פריט יחיד מ- $\mathbb{N}_0$ . היות שכך, לשני תיקים יש את אותה קרדינליות, ואת אותו מִגִּין פריטים.

היגיון זה פועל עבור כל מִגִּין של דברים שנוסיף לתיק  $\mathbb{N}$ . לכן, לא משנה כמה פריטים סופיים נוסיף לתיק  $\mathbb{N}$ , התיק עדיין יהיה קבוצה בת מִגִּיה אינסופית, ויכיל את אותו מִגִּין פריטים.

**חיבור אינסוף ועוד אינסוף**

*דוגמה 3:* ראינו שתיק המכיל את כל המספרים החיוביים הוא קבוצה בת מִגִּיה אינסופית. באותו היגיון, תיק המכיל את כל המספרים השליליים הוא קבוצה בת מִגִּיה אינסופית. מה יקרה אם נשים בתיק אחד את כל המספרים החיוביים, את כל המספרים השליליים ואת הספרה 0? האם תיק זה יהיה גדול יותר מתיק  $\mathbb{N}$ ?

נשתמש בסימן  $\mathbb{Z}$  עבור התיק המכיל את כל המספרים (חיוביים, שליליים ואפס)<sup>4</sup>. כדי ליצור זוגות בין המספרים מ- $\mathbb{N}$  ומ- $\mathbb{Z}$ , עלינו להשתמש בחוקים מורכבים יותר.

$\mathbb{Z}$

המספרים "השלמים", תיק המכיל את כל המספרים השליליים, את כל המספרים החיוביים ואת הספרה אפס.

<sup>4</sup>מדובר באות  $\mathbb{Z}$  מודגשת. היא מסמלת את המילה הגרמנית "zahlen", שפירושה "מספרים".

**איור 2**

כל מספר מ- $\mathbb{N}$  יכול להימצא בזוג עם מספר יחיד מ- $\mathbb{Z}$ . כך, מְנִין המספרים החיוביים זהה למְנִין המספרים החיוביים והשליליים. All numbers = כל המספרים



(1) אם  $n$  הוא אי-זוגי, אז המספר  $n$ -י יימצא בזוג עם המספר  $2:(n-1)$  מ- $\mathbb{Z}$ .

(2) אם  $n$  הוא זוגי, אז המספר  $n$ -י יימצא בזוג עם המספר  $2:n$  מ- $\mathbb{Z}$ .

דוגמאות:

- 4 הוא מספר זוגי, ו- $2=2:2$ . לכן, המספר 4-י יימצא בזוג עם המספר 2-.
- 5 הוא מספר אי-זוגי, אז נחשב  $4=5-1$ , ו- $2=2:4$ . לכן, המספר 5-י יימצא בזוג עם המספר 2.
- המספר 24-י יימצא בזוג עם המספר 12-.
- המספר 57-י יימצא בזוג עם המספר 28.

שוב, סידרנו בזוגות כל פריט מ- $\mathbb{N}$  עם פריט מ- $\mathbb{Z}$  (איור 2). כלומר,  $\mathbb{Z}$  הוא קבוצה בְּת מְנִיה אינסופית. מְנִין המספרים (חיוביים ושליליים) זהה למְנִין המספרים החיוביים.

**חיסור מאינסוף**

ראינו שחיבור פריט אחד או אינסוף פריטים לתיק שהוא קבוצה בְּת מְנִיה אינסופית אינו גורם לתיק להיות גדול יותר (ראו דוגמה 3). אבל, מה יקרה אם נתחיל להוציא פריטים מתיק שהוא קבוצה בְּת מְנִיה אינסופית?

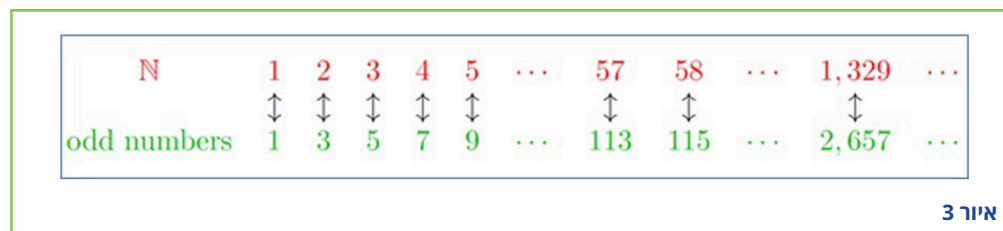
**דוגמה 4:** תארו לעצמכם את התיק המכיל את כל המספרים החיוביים, והוציאו ממנו את המספר 1. נקרא לתיק זה  $\mathbb{N}_1$ . נראה שהתיק  $\mathbb{N}_1$  הוא קבוצה בְּת מְנִיה אינסופית, על-ידי יצירת זוגות בין כל פריט מ- $\mathbb{N}_1$  עם פריט מ- $\mathbb{N}$ . כמו קודם, נוסיף "י" לסוף של כל מספר המגיע מ- $\mathbb{N}$ . ניצור זוג של המספר  $n$ -י (מ- $\mathbb{N}$ ) עם המספר  $n+1$  (מ- $\mathbb{N}_1$ ).

דוגמאות:

- המספר 1-י יימצא בזוג עם המספר 2.
- המספר 5-י יימצא בזוג עם המספר 6.
- המספר 30-י יימצא בזוג עם המספר 31.

### איור 3

כל מספר מ- $\mathbb{N}$  יכול להימצא בזוג עם מספר אי-זוגי יחיד. כך, מִנְיַן המספרים זהה לִמְנִיַן המספרים האי-זוגיים. מספרים = Odd numbers אי-זוגיים



כל פריט מ- $\mathbb{N}$  יימצא בזוג עם פריט יחיד מ- $\mathbb{N}_1$ . מכאן, לשני התיקים יש את אותה קרדינליות, ואת אותו מִנְיַן פריטים. היגיון זה פועל עבור כל מִנְיַן של פריטים שנוציא מתיק  $\mathbb{N}$ . לא משנה כמה פריטים סופיים נוציא מ- $\mathbb{N}$ , התיק עדיין יהיה קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית, ועדיין יוכל את אותו מִנְיַן פריטים. עכשיו, מה יקרה אם מִנְיַן הפריטים שנוציא יהיה קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית? במקרה זה, התשובה תלויה במה שנוציא.

**דוגמה 5:** אנו יודעים כי המספרים החיוביים הזוגיים הם קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית (ראו דוגמה 1). תארו לעצמכם תיק המכיל את כל המספרים החיוביים, והוציאו מתיק זה את כל המספרים החיוביים הזוגיים. כל מה שישאר בתיק הוא המספרים החיוביים האי-זוגיים. באותה דרך שבה המספרים הזוגיים הם קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית, כך גם המספרים האי-זוגיים (כדי לראות זאת, ניצור זוגות של המספר  $n$ -י עם המספר האי-זוגי  $2n-1$ , ראו איור 3).

במקרה זה, אם נתחיל בתיק שהוא קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית ונוציא ממנו פריטים במִנְיַן קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית, עדיין יישאר לנו מִנְיַן פריטים שהוא קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית. במילים אחרות: נישאר עם תיק שהוא קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית.

**דוגמה 6:** תארו לעצמכם תיק המכיל את כל המספרים החיוביים, כמו תיק  $\mathbb{N}$ . מתיק זה נוציא את כל המספרים הגדולים מ-1. מה שהוצאנו מהתיק  $\mathbb{N}$  הוא התיק  $\mathbb{N}_1$  (ראו דוגמה 4). אנו נישאר עם תיק המכיל את המספר 1. הקרדינליות של תיק המכיל רק את המספר 1 היא 1.

במקרה זה, התחלנו עם תיק שהוא קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית, חיסרנו ממנו פריטים שמִנְיַנָם קבוצה בִּתְ מְנִיַה אינסופית, ונותרנו עם פריט יחיד.

### מסקנות

מאמר זה מרָאָה כמה מההתנהגויות המוזרות של ה"אינסוף". הדוגמאות האלה מראות כי אי אפשר לעסוק ב"אינסוף" כאילו היה מספר. כאשר אנו מְבַצְעִים פעולות חיבור או חיסור, ה"אינסוף" מתנהג אחרת ממספרים אחרים.

אומנם מוֹזְרוֹת זו בלבלה מתמטיקאים בהתחלה, אך כאשר חזרו ליסודות, הם הצליחו להבין את ה"אינסוף". דבר זה חזר על עצמו לאורך ההיסטוריה – מושגים שפעם היו מסתוריים נהיו מובנים, כאשר נזהרו בהגדרתם.

פורסם אונליין: 31 במאי 2019

Norma Ortiz-Robinson, Grand Valley State University, United States: **נערך על ידי:**

Front. Young Minds. Bouyer F (2019) אינסוף, וניסיון לפתור תרגילי חשבון בעזרתו. Front. Young Minds 6:61. doi: 10.3389/frym.2018.00061-he

**תורגם והותאם:**

Bouyer F (2018) Infinity and Trying to do Maths With It. Front. Young Minds 6:61. doi: 10.3389/frym.2018.00061

**הצהרת ניגוד אינטרסים:** המחברים מצהירים כי המחקר נערך בהעדר כל קשר מסחרי או פיננסי שיכול להתפרש כניגוד אינטרסים פוטנציאלי.

**COPYRIGHT** © 2018 © 2019 Bouyer. זהו מאמר בגישה פתוחה שמופץ תחת תנאי רישיון Creative Commons Attribution License (CC BY). השימוש, ההפצה או ההעתקה מותרים לשימוש בפורומים אחרים ובלבד שיינתן קרדיט למחברים (המקוריים ולבעל זכויות היוצרים, ושהפרסום המקורי בעיתון זה מצוטט בהתאם למקובל באקדמיה. השימוש, ההפצה או ההעתקה אינם מותרים אם הם אינם עומדים בתנאים אלה.

**סוקר צעיר**

**RIK, גיל: 13**

שמי ריק ואני בן 13 (5x3). אני מתאר לעצמי שאתם מבינים מזה שאני "חנן" של מתמטיקה. דברים נוספים שאני אוהב לעשות הם לנגן בגיטרה, לשחק כדורגל ולשחק בתיאטרון.

**הכותב**

**FLORIAN BOUYER**

אני שותף הוראה בכיר באוניברסיטת בריסטול, הממלכה המאוחדת. תחום העניין שאותו אני חוקר הוא התחום הטהור של המתמטיקה, וליתר דיוק: "תיאוריית המספרים". לעיתים קרובות, קל לשאול שאלות בתיאוריית המספרים, אבל הכלים הַמְשֻׁמָּשִׁים כדי לענות על שאלות אלה מורכבים מאוד. \*f.j.s.c.bouyer@gmail.com



Hebrew version provided by

מוזיאון המדע ע"ש בלומפילד ירושלים (ער.)  
متحف العلوم على اسم بلومفيلد القدس  
Bloomfield Science Museum Jerusalem

